Invariance du temps de parcours des ondes dans les systèmes complexes

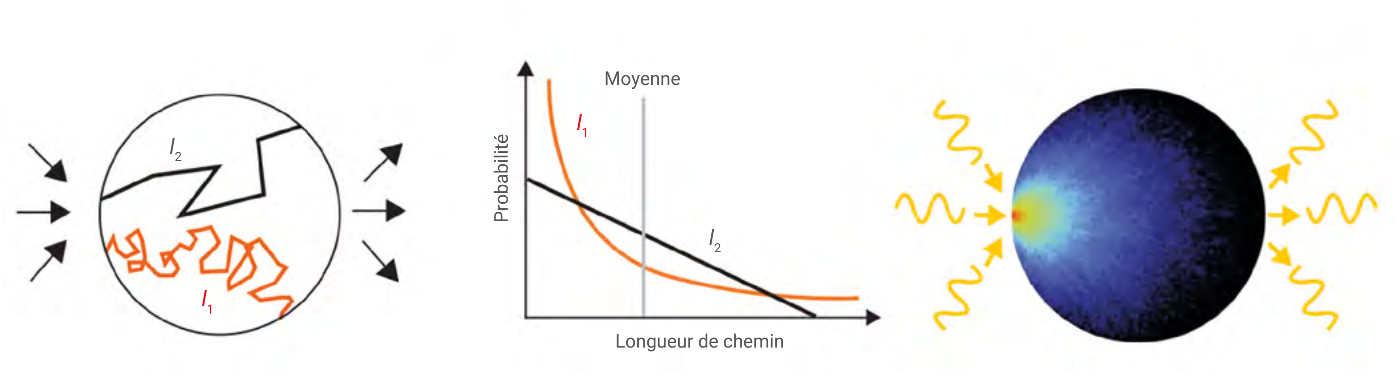
Sylvain Gigan(1) (sylvain.gigan@lkb.ens.fr) et **Matthieu Davy**(2) (matthieu.davy@univ-rennes1.fr)
(1) Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Collège de France, 24 rue Lhomond, 75005 Paris
(2) Institut d'électronique et des technologies du numérique, Université de Rennes - CNRS, Campus de Baulieu, 35700 Rennes

**Considérons un marcheur suivant des trajectoires aléatoires et isotropes. Le libre parcours moyen *l* définit la distance statistique à partir de laquelle sa direction a perdu toute mémoire de sa direction initiale.
Comme illustré sur la figure 1a, le marcheur suit des trajectoires tortueuses au sein du milieu dont la longueur totale dépend de ce libre parcours moyen. Un résultat classique de la théorie de la diffusion est que la longueur curviligne moyenne de parcours *L* entre deux points A et B est proportionnelle au carré de la distance *d* entre ces deux points, et inversement proportionnelle au libre parcours moyen *l* : $L \sim d^2/l$. Ainsi, plus le pas moyen est petit, plus la longueur parcourue pour rejoindre un point à une distance donnée sera importante.
La diffusion est en effet un phénomène lent et tortueux comparativement à un trajet direct entre deux points, qui dépend linéairement de la distance. Ce résultat s'applique non seulement aux marcheurs aléatoires, mais à un grand nombre de processus diffusifs : chaleur, lumière en milieux désordonnés, etc.
Plus généralement, le libre parcours moyen *l* est la quantité cruciale qui pilote l'ensemble des phénomènes de transport, depuis la transmission ou réflexion à travers un milieu, le temps moyen de résidence, etc…**

En contradiction avec ces notions de bases des marches aléatoires, une propriété très surprenante a été mise en évidence dans une étude théorique de Blanco et Fournier (Université Paul Sabatier) en 2003 [1] lorsqu'on considère l'ensemble des trajectoires de marcheurs aléatoires injectés à travers une surface S délimitant un volume V. Bien que la distribution des trajectoires internes varie fortement avec le libre parcours moyen, leur longueur **moyenne** à l'intérieur du milieu (en considérant l'ensemble des modes d'entrée et de sortie possibles) ne dépend plus du pas moyen de la marche aléatoire mais uniquement du rapport V/S entre le volume et la surface explorés en 3 dimensions, et du rapport aire sur périmètre en 2D (voir figure 1). Ce résultat est valable sous des conditions d'isotropie de la direction d'entrée (c'est-à-dire que les marcheurs sont injectés avec une orientation quelconque, statistiquement uniforme). Pour retrouver cette propriété contre-intuitive d'invariance en fonction de *l*, il est nécessaire de considérer tant les chemins courts que longs. Comme cela est illustré sur la figure 1b, pour un libre parcours moyen petit devant les dimensions du milieu, la probabilité de rencontrer des trajectoires longues se réduit. Le marcheur aléatoire tend préférentiellement à pénétrer à une faible profondeur, explorer un petit volume, et ressortir du milieu par un point proche de son point d'entrée. Ces chemins courts sont contrebalancés par des chemins plus rares mais ayant des trajectoires beaucoup plus longues afin de ressortir loin du point d'entrée (par exemple de l'autre côté du milieu). Blanco et Fournier ont montré que, sous la condition d'isotropie, les probabilités de distribution de ces trajectoires courtes et longues se compensent parfaitement. En d'autres termes, bien que la distribution de longueur de trajectoire dépende fortement de *l*, la longueur moyenne de chemin devient elle indépendante de *l* (fig. 1b). Pour un disque de rayon R, on peut ainsi montrer que la longueur moyenne de chemin est 2R, que les trajectoires soient balistiques (en ligne droite, correspondant à un *l* très grand devant la taille du système), faiblement ou fortement diffusives.

Ce résultat vient de fait généraliser des résultats plus anciens (propriétés de *mean-chord length*) utilisés par exemple en physique nucléaire. Il est aussi connecté à des résultats très généraux en physique des marcheurs aléatoires autour des statistiques de temps de premier passage [6]. La propriété d'invariance est également valable au-delà du simple mouvement brownien, par exemple pour des particules actives, comme cela a été montré expérimentalement en étudiant les trajectoires des bactéries au sein d'environnements complexes microstructurés [5] . Néanmoins, le lien avec la physique des ondes restait jusqu'à très récemment inexploré.

Article disponible sur le site https://www.refletsdelaphysique.fr ou https://doi.org/10.1051/refdp/202684030



a b c

1. Principe de l'invariance de la longueur de chemin.
(a) Principe pour une géométrie circulaire, sous une illumination et détection isotrope (lambertienne). Pour un libre parcours moyen faible (l_1), les changements de direction rapides nécessitent une longue distance pour traverser le milieu. Inversement des trajectoires quasi balistiques sont observées lorsque l est grand ($l = l_2$).
(b) Ces deux cas mènent à des distributions des longueurs de chemins très différentes. Pour $l = l_1$, la probabilité d'une sortie du milieu proche du point d'entrée (trajectoire courte) est notamment forte. Malgré tout, la valeur moyenne de ces deux distributions reste inchangée.
(c) Simulations en Monte-Carlo de trajectoires de diffusion de la lumière dans la même géométrie. La propagation de la lumière est régie par l'équation de diffusion, validant les hypothèses de Blanco et Fournier pour la propriété d'invariance. L'intensité est forte près du point d'injection des ondes (couleur rouge) puis s'étend dans le milieu avec une distribution moyenne suivant l'équation de diffusion. (crédit : réf. [3])

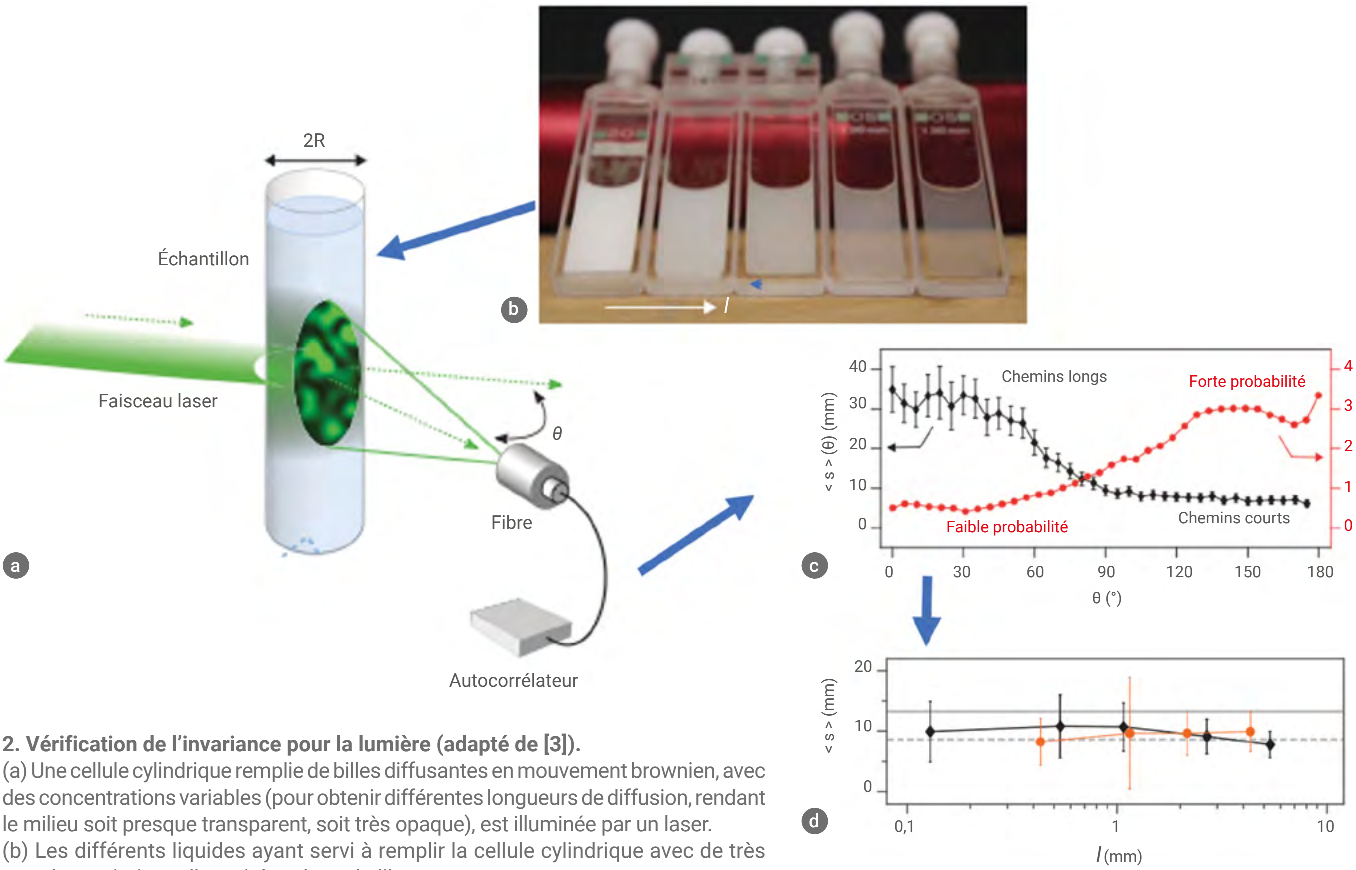
“ Outre son intérêt fondamental, l'invariance de la longueur de parcours des ondes, revêt, de par son caractère très général, une importance majeure dans de nombreuses applications pratiques liées aux interactions lumière-matière. ”

Intuitivement, la propriété d'invariance étant valable pour des marches aléatoires, elle devrait pouvoir être généralisée à la diffusion des ondes en milieux désordonnés, puisque cette dernière peut également être modélisée par des processus stochastiques. Cette intuition est confirmée par le lien entre le temps de parcours (lié à la longueur de chemin) et la densité d'états d'un système (nombre de modes électromagnétiques dans un intervalle de fréquence donné). Dans les milieux désordonnés, cette densité d'états est une quantité statistique dont la densité moyenne ne dépend que du volume, résultat appelé loi de Weyl. Si ce lien était déjà connu, la connexion avec le désordre restait inexplorée. La densité d'état moyenne étant indépendante de la structure du milieu, le temps de parcours moyen ne devrait pas dépendre du désordre, donc du libre parcours moyen pour une onde s'y propageant. Ce lien avec l'invariance de la longueur moyenne des marches aléatoires a été démontré en 2014 par Pierrat *et al.* [2], établissant numériquement cette propriété d'invariance pour les ondes en régime diffusif. L'invariance a ainsi été vérifiée à partir de simulations Monte-Carlo de la propagation de la lumière dans des échantillons désordonnés (fig. 1c).

Ce résultat a été confirmé expérimentalement 3 ans plus tard en 2017 par Savo *et al.* [3] par une expérience d'optique résumée sur la figure 2 (voir page 32). Un tube cylindrique de rayon R rempli d'un liquide avec des concentrations variables de particules diffusantes est éclairé avec un laser. Un détecteur, placé sur un bras rotatif pouvant tourner autour du cylindre, tel un goniomètre, permet de mesurer l'intensité diffusée en fonction de l'angle ; le temps de parcours dans une direction donnée est déduit des fluctuations temporelles d'intensité. Le résultat classique de diffusion a été observé : en augmentant la concentration de particules diffusantes, on passe d'une diffusion essentiellement vers l'avant avec des chemins quasi balistiques lorsque le libre parcours moyen est grand devant la taille du tube, à une rétrodiffusion forte avec des chemins courts, lorsque la diffusion est forte et le milieu très opaque. Cependant, en évaluant la longueur moyenne de chemin sur l'ensemble des directions de sortie (déduite grâce aux fluctuations temporelles de l'intensité diffusée), on retrouve le résultat prédit par Blanco et Fournier : la longueur moyenne de chemin pour la lumière est toujours de ~2R, même en faisant varier de deux ordres de grandeur la concentration de particules et donc le libre parcours moyen (fig. 2d).

Dans les milieux diffusifs, l'intensité transmise et le temps de propagation des ondes peuvent être modélisés à partir de l'équation de diffusion qui néglige les effets d'interférence propres aux ondes. Ces milieux relèvent donc directement des résultats théoriques de l'étude de Blanco et Fournier. Néanmoins, des phénomènes fascinants

>>>



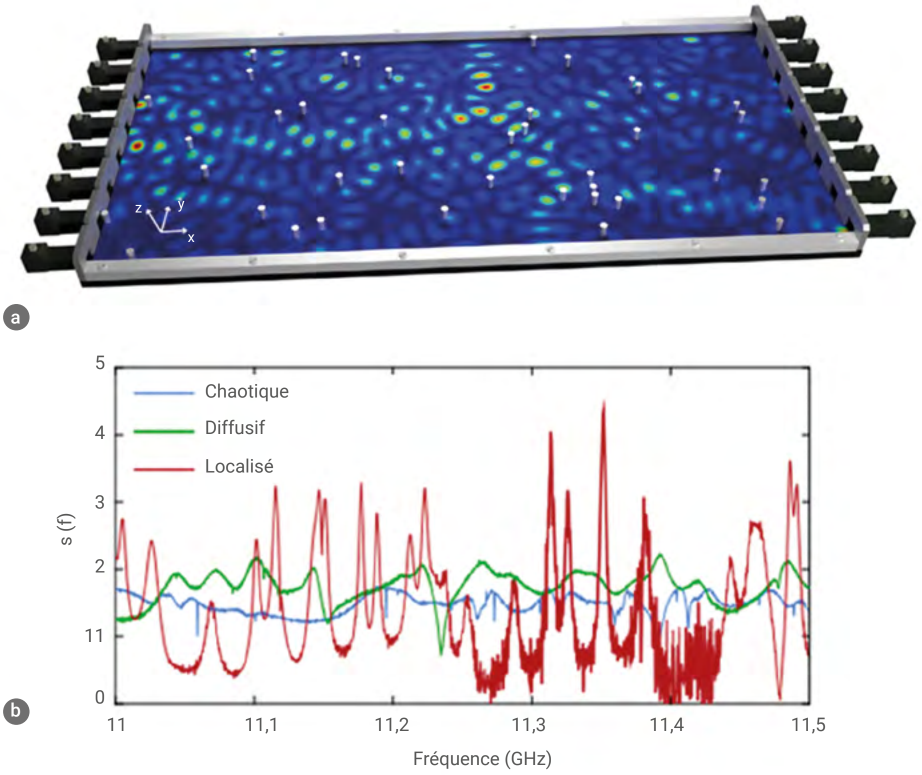
2. Vérification de l'invariance pour la lumière (adapté de [3]).
(a) Une cellule cylindrique remplie de billes diffusantes en mouvement brownien, avec des concentrations variables (pour obtenir différentes longueurs de diffusion, rendant le milieu soit presque transparent, soit très opaque), est illuminée par un laser.
(b) Les différents liquides ayant servi à remplir la cellule cylindrique avec de très grandes variations d'opacité et donc de libre parcours moyen.
(c) En faisant tourner un détecteur autour de la cellule, on mesure la corrélation temporelle avec un autocorrélateur. Elle est reliée au nombre moyen d'évènements de diffusion et on en déduit la longueur moyenne du chemin <s>(θ) en fonction de l'angle θ.
(d) En moyennant sur les directions de sortie θ, on vérifie l'invariance de la longueur de chemin <s> (points rouges et noirs pour deux diamètres de billes) et on montre qu'elle est indépendante du libre parcours moyen *l* et cohérente avec la valeur théorique de 2R (ligne horizontale).

>>>

et purement ondulatoires sont fondés sur les interférences entre chemins de propagation et la question de l'extension de la propriété d'invariance à ces milieux se posait. En particulier, la localisation d'Anderson (dite localisation forte) est un phénomène tout à fait fondamental et purement ondulatoire correspondant à une disparition de la diffusion au sein de milieux aléatoires fortement diffusant [7] : lorsque le désordre est fort, les interférences constructives entre chemins de propagation tendent à piéger exponentiellement les ondes au sein du milieu, supprimant ainsi leur transmission. Cependant, la loi de Weyl est suffisamment générale pour y rester valable, ainsi l'invariance devrait y être également respectée. Dans la référence [2], il a été montré théoriquement que l'invariance est robuste et reste vérifiée en régime de localisation forte.

Pourtant, la vérification expérimentale de ce régime de transport est particulièrement difficile en optique, où ce régime reste encore difficilement accessible, et n'a donc pas été atteint dans l'expérience d'optique de 2017 [3].

En 2021, en passant dans le domaine des micro-ondes, à des fréquences de plusieurs GHz, nous avons vérifié expérimentalement la robustesse de la propriété d'invariance en présence de localisation d'Anderson. Dans le domaine des micro-ondes, les longueurs d'onde centimétriques permettent en effet de créer des dispositifs expérimentaux dont la structure est aisément usinable et contrôlable. Le désordre est créé en plaçant verticalement des cylindres métalliques dans une cavité micro-onde se comportant comme un milieu à deux dimensions (voir figure 3a). Le positionnement des cylindres est aléatoire et en variant leur nombre, on peut modifier les caractéristiques de propagation depuis le régime balistique au régime localisé en passant par le régime diffusif. Le régime localisé est atteint lorsque des centaines de diffuseurs créent un désordre suffisamment fort. Les ondes sont injectées par un premier réseau d'antennes émettrices (des guides d'onde monomode) placées d'un côté et la transmission à travers la cavité désordonnée est mesurée grâce à un second réseau d'antennes réceptrices. Le temps de parcours moyenné sur l'ensemble des canaux est reconstruit à chaque fréquence à partir de la mesure de cette matrice en transmission entre les deux réseaux d'antennes. Le temps de parcours dépend en effet directement de la dérivée de la phase du signal en fonction de la fréquence, grâce à l'opérateur de Wigner-Smith. Cet opérateur, introduit dans les années 1950 par Eugène Wigner pour des géométries à une dimension, puis généralisé à des géométries multicanaux par Félix Smith, caractérise le temps de



3. Vérification de l'invariance en micro-ondes dans le régime localisé (adaptée de [4]).
(a) Cavité micro-ondes rendue désordonnée par la présence de cylindres métalliques positionnés aléatoirement. La matrice en transmission est mesurée entre deux réseaux de 8 antennes positionnés à chaque interface. Le champ déterminé en simulations dans la cavité est superposé au schéma.
(b) En faisant varier le nombre de cylindres entre 0 et 280, la longueur moyenne du chemin est estimée en fonction de la fréquence pour trois régimes de propagation : les régimes chaotique, diffusif et localisé. Le changement de régime induit une augmentation des fluctuations, notamment dans le régime localisé, mais la valeur moyenne de la longueur des chemins est conservée.

parcours d'un champ au sein d'un milieu. Les variations du temps de parcours avec la fréquence sont illustrées sur la figure 3b. Bien que les fluctuations de ce temps augmentent avec le désordre, avec notamment des pics de grande amplitude en régime localisé, sa valeur moyenne reste constante, confirmant de nouveau la loi d'invariance sur l'ensemble des régimes de propagation dans les milieux désordonnés, depuis la propagation balistique en l'absence de désordre à la localisation d'Anderson.

Enfin, nous avons pu vérifier l'invariance pour un second phénomène iconique lié aux interférences des ondes : les bandes interdites dans les cristaux photoniques. Ces cristaux sont des structures régulières dont les diffuseurs sont ordonnés à l'échelle de la longueur d'onde. Les interférences de Bragg entre chemin de diffusion suppriment la transmission des ondes à travers le cristal uniquement dans certaines bandes spectrales – les bandes interdites. Conjointement, cette absence de transmission mène à une diminution drastique du temps de parcours moyen car les ondes pénètrent peu au sein du cristal. Il pourrait alors être tentant de conclure que la propriété d'invariance n'est plus respectée. Néanmoins, nous avons pu montrer que cette diminution est contrebalancée par une accumulation des états, et donc une augmentation du temps de parcours, sur les bords de la bande interdite. Une moyenne sur une bande de fréquences suffisamment large permet donc de restaurer la propriété d'invariance.

Outre son intérêt fondamental, l'invariance de la longueur de parcours des ondes, revêt, de par son caractère très général, une importance majeure dans de nombreuses applications pratiques liées aux interactions lumière-matière. Elle intervient notamment dans la conception de structures ultrasensibles ou dédiées à la récupération d'énergie. Ce résultat d'invariance vient par exemple généraliser une propriété bien connue pour les cellules photovoltaïques, qui est qu'on ne peut pas augmenter l'absorption d'une cellule au-delà d'une certaine valeur en structurant sa surface [8]. Cette propriété universelle, si elle ne donne pas directement de recette pour améliorer ces dispositifs, montre qu'il existe des limites sur les performances de ces systèmes. Elle donne aussi des pistes d'amélioration : en contournant certaines hypothèses sous-jacentes à sa validité, on peut ainsi espérer optimiser les performances. Cela peut inclure le contrôle des fronts d'onde, l'optimisation de la structure pour une gamme spécifique de fréquences ou d'incidences, ou encore l'ajustement de l'absorption. ▮

1• S. Blanco et R. Fournier, "An invariance property of diffusive random walks", *Europhysics Letters* **61**(2) (2003) 168.

2• R. Pierrat *et al.*, "Invariance property of wave scattering through disordered media", *Proceedings of the National Academy of Sciences* **111**(50) (2014) 17765-17770.

3• R. Savo *et al.*, "Observation of mean path length invariance in light-scattering media", *Science*, **358**(6364) (2017) 765-768.

4• M. Davy *et al.*, "Mean path length invariance in wave-scattering beyond the diffusive regime", *Communications Physics* **4**(1) (2021) 85.

5• G. Frangipane *et al.*, "Invariance properties of bacterial random walks in complex structures", *Nature communications* **10**(1) (2019) 2442.

6• O. Bénichou *et al.*, "Intermittent search strategies", *Reviews of Modern Physics* **83**(1) (2011) 81-129.

7• A. Lagendijk *et al.*, "Fifty years of Anderson localization", *Physics Today* **62**(8) (2009) 24-29.

8• E. Yablonovitch, "Statistical ray optics", *Journal of the Optical Society of America* **72**(7) (1982) 899-907.