Noether était-elle physicienne ?

Yvette Kosmann-Schwarzbach (yks@math.cnrs.fr)
Professeure des universités retraitée

Pour célébrer le cent-deuxième anniversaire de la publication de l'article fondamental d'Emmy Noether sur la relation entre symétries et lois de conservation pour les problèmes variationnels, "Invariante Variationsprobleme", voici une analyse de sa contribution à la résolution d'un problème issu de la théorie de la relativité générale et une esquisse de l'importance de son œuvre dans toutes les théories physiques.

Emmy Noether vers 1930.

Emmy Noether, fille du mathématicien Max Noether

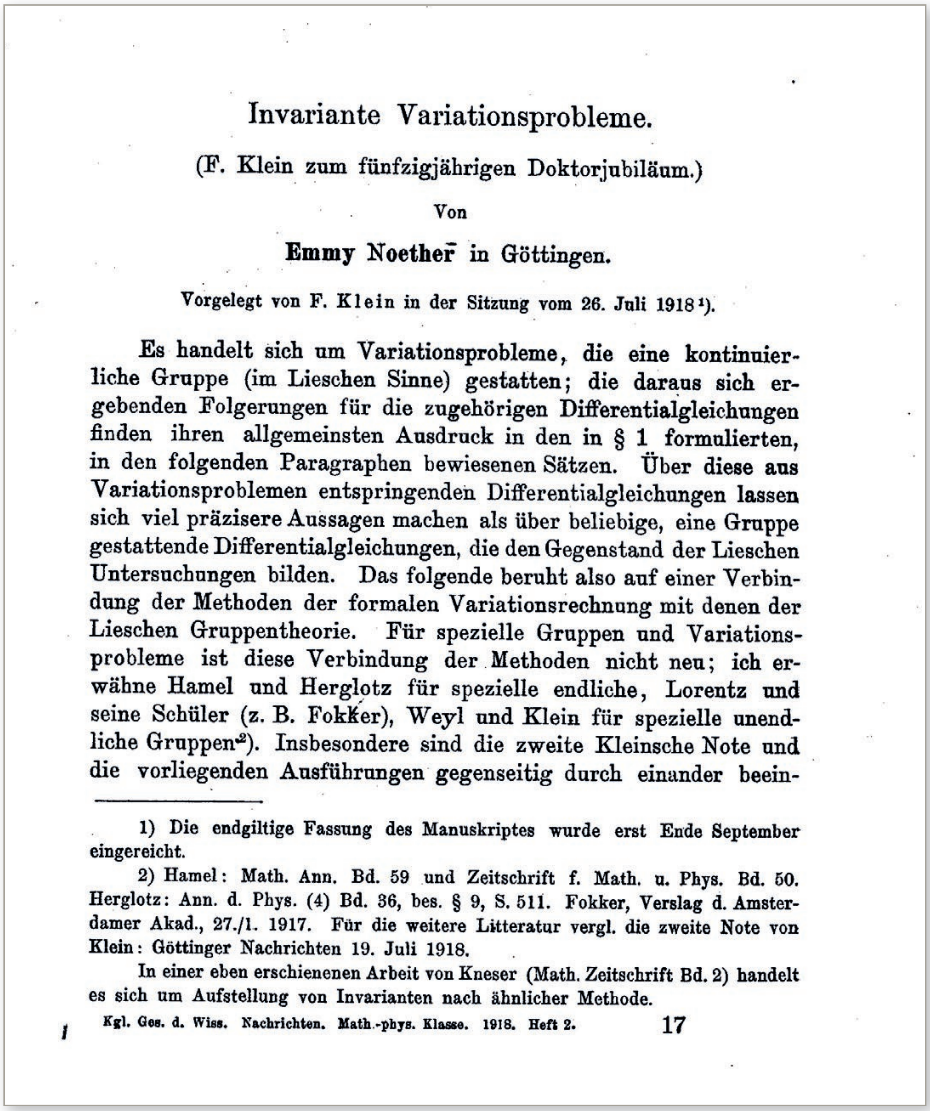
Emmy Noether est la fille de Max Noether, l'un des plus grands spécialistes de géométrie algébrique de la fin du dix-neuvième siècle. Si vous ouvrez un dictionnaire biographique qui date d'avant 1980, vous lirez : « Noether (Emmy), fille du mathématicien Max Noether, née à Erlangen (Bavière, Allemagne) en 1882, morte à Bryn Mawr, près de Philadelphie (Pennsylvanie, États-Unis) en 1935, etc. ». Mais la fille deviendra ensuite plus célèbre que son père et, de nos jours, vous trouverez le plus souvent : « Noether (Max) (1844-1921), père de la mathématicienne Emmy Noether, etc. ».

Dans sa famille juive, « adolescente, elle prenait part à l'entretien de la maison, faisait le ménage et la cuisine, allait danser, et il semble que sa vie aurait été celle des autres femmes si... »[(a)]. Alors qu'elle étudie d'abord les langues, le français et l'anglais, elle assiste ensuite, à partir de 1903 – en auditrice libre parce que les jeunes filles ne seront autorisées à s'inscrire que l'année suivante – aux cours de mathématiques que donne son père à l'Université d'Erlangen, ainsi qu'à ceux de son collègue, Paul Gordan (1837-1912)[(b)]. Elle soutiendra une thèse de mathématiques préparée sous la direction de Gordan en 1907 et publie dès lors dans les meilleurs périodiques. Les grands mathématiciens, professeurs à l'Université de Göttingen, Felix Klein

Article disponible sur le site https://www.refletsdelaphysique.fr ou https://doi.org/10.1051/refdp/202065034

(1849-1925) et David Hilbert (1862-1943), l'invitent en 1915 pour obtenir son aide dans leurs travaux sur la théorie de la relativité générale. Elle est proposée, dès le 4 décembre 1915, pour l'habilitation, mais un décret de 1908 de la législation prussienne interdit explicitement de la décerner aux femmes. Hilbert tente par deux fois de passer outre en obtenant un vote de l'assemblée des professeurs, mais il se heurte à l'opposition de ses membres, très conservateurs. On rapporte que Hilbert, exaspéré par le conservatisme de ses collègues, s'exclama : « Mais enfin, nous sommes une Université, pas un établissement de bains ! », mais sans succès. Les cours de Noether ne pouvant pas être annoncés sous son nom, ils sont officiellement des cours donnés par le professeur Hilbert, « avec l'assistance de Mlle Dr. Noether ». L'habilitation ne lui sera accordée qu'en 1919 après la fin de la guerre et le changement de législation qui suivit.

C'est au long des années 1920 que Noether introduit des méthodes radicalement nouvelles dans l'étude de la structure des algèbres commutatives, puis non commutatives, et de leurs idéaux. En les appliquant à l'algèbre d'un groupe, elle démontre des théorèmes fondamentaux sur les représentations des groupes finis. Noether sera parmi les plus grands algébristes du vingtième siècle, appelée plus tard « la créatrice de l'algèbre moderne ». Comme les noms de quelques autres grands mathématiciens sont devenus des adjectifs, cartésien, eulérien, lagrangien, gaussien, riemannien, hilbertien, son nom donnera « noethérien ».



Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

1 Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1918. Heft 2. 17

Première page de l'article "Invariante Variationsprobleme", paru en 1918 dans la revue *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys.*, pp. 235-257.

Pour quoi Emmy Noether est-elle si célèbre ?

Pour quoi Emmy Noether est-elle si célèbre ? Principalement, pour son œuvre d'algébriste, ses travaux fondamentaux sur la structure des anneaux et les représentations des groupes. Et, « accessoirement », pour son article de 1918, "Invariante Variationsprobleme", qui l'a finalement rendue célèbre dans le monde des physiciens, bien des décennies plus tard. Elle ne fit jamais référence à cet article dans ses publications ultérieures, qui toutes concerneraient l'algèbre abstraite. On en trouve mention une seule fois, dans une lettre qu'elle écrivit en 1926 à Einstein qui avait sollicité son avis sur un projet d'article soumis par un physicien à un grand journal de mathématiques. Elle lui répond que ce n'est pas très original par rapport à ce qu'elle avait publié dans son article « en 1918 ou 1919 » (elle n'était déjà plus très sûre de sa date de publication et n'en faisait pas grand cas...) et elle juge le résultat de ce « preprint » si peu intéressant qu'elle conclut dédaigneusement : « on pourrait peut-être convaincre un journal de physique d'en accepter une partie » ! Cette anecdote répond assez bien par la négative à la question, « était-elle physicienne ? ».

Que contient son article de 23 pages sur les problèmes variationnels invariants ? Pourquoi est-il si important ? Comment les résultats qu'il contient sont-ils devenus si célèbres parmi les étudiants et les chercheurs, en mécanique classique et quantique, en théorie quantique des champs, en relativité générale, en cosmologie et en de nombreux autres domaines de la physique ?

D'Erlangen à Göttingen

Disons tout d'abord que, contrairement à ce que l'on a pu lire récemment dans certains articles de vulgarisation des plus fantaisistes, Noether n'a pas parlé d'orbites solaires ni de bicyclettes dans son article de 1918. Elle n'a pas non plus affirmé, en toute généralité, qu'à chaque symétrie des lois de la nature correspond la conservation d'une quantité physique, comme certains physiciens le pensent ; mais la lecture de son article de 1918, « Problèmes variationnels invariants », montre pourquoi cette assertion devient vraie lorsque les équations de la théorie physique considérée dérivent d'un problème variationnel, ce qui est le cas de celles de la relativité générale et de toutes les théories modernes.

Comme il apparait bien dans sa lettre à Einstein, elle n'était pas elle-même physicienne, mais son article fut écrit en réponse à une question concernant la relativité générale, posée en 1915 par les mathématiciens de Göttingen, Klein et Hilbert, qui essayaient alors de résoudre un problème posé par les équations de la gravitation et correspondaient avec Einstein, lequel travaillait à ce moment à Berlin sur ces équations. Einstein avait été invité à Göttingen en juin 1915 pour y faire des conférences et y avait exposé ce qu'il est maintenant convenu d'appeler le "Entwurf" (brouillon, version préliminaire) de la théorie de la relativité générale. De retour à Berlin, il s'était déclaré « enthousiasmé par Hilbert » et il écrivait qu'il avait « eu le plaisir de convaincre complètement les mathématiciens » et qu'il avait été « compris jusqu'au moindre détail »[c].

Parce que le problème de la conservation de l'énergie en relativité générale était lié à une propriété d'invariance des équations de champ, et parce que la thèse que Noether avait soutenue à l'Université d'Erlangen en 1907 était une contribution à la théorie des invariants et qu'elle avait publié ensuite plusieurs articles sur ce sujet, Klein et Hilbert l'invitèrent dès 1915 à venir à Göttingen pour les aider à comprendre le problème de l'énergie posé par la nouvelle théorie de la relativité générale. C'est le problème qu'elle réussit à résoudre trois ans plus tard.

Deux théorèmes fondamentaux[d]

L'article de Noether contient deux théorèmes fondamentaux et non un seul (comme beaucoup d'auteurs le croient et le laissent croire). Au premier paragraphe, elle énonce les deux théorèmes :

I. Si l'intégrale I est invariante par rapport à un [groupe] $\mathfrak{G}_\rho$, *alors il y a* ρ *combinaisons linéairement indépendantes entre les expressions lagrangiennes qui deviennent des divergences – et réciproquement, il résulte de cela l'invariance de I par un [groupe]* $\mathfrak{G}_\rho$. *Le théorème reste encore valable dans le cas limite d'un nombre infini de paramètres.*

II. Si l'intégrale I est invariante par rapport à un [groupe] $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ *dépendant de [*ρ*] fonctions arbitraires et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre* σ, *alors il y a* ρ *identités entre les expressions lagrangiennes et leurs dérivées jusqu'à l'ordre* σ *; ici aussi la réciproque est valable.*

En d'autres termes, le premier théorème établit la relation entre les symétries de l'intégrale d'action d'une théorie lagrangienne et les lois de conservation[e], par exemple la conservation du moment linéaire associée à l'invariance du lagrangien par translations, ou celle du moment angulaire dans le cas de l'invariance par rotations, ou encore la conservation de la charge dans une théorie des champs invariante sous l'action du groupe à un paramètre des transformations de jauge globales. Ce théorème a donc des applications en mécanique newtonienne et en relativité restreinte, ainsi qu'en théorie des champs lorsque le groupe de symétries de la théorie est de dimension finie.

Le théorème II s'applique aux groupes de symétries de dimension infinie, tels que le groupe des difféomorphismes de l'espace-temps de la relativité générale ou le groupe de jauge dans les théories de jauge, par exemple celles correspondant aux groupes unitaires, U(1), SU(2) ou SU(3), dans le modèle standard des particules élémentaires. Ainsi, le théorème II montre que l'invariance du lagrangien par le groupe de symétries de dimension infinie de ces théories implique que les équations de champ satisfont des identités. Dans chaque cas, Noether démontre une réciproque de son théorème.

Théorème I : Lois de conservation

La démonstration du premier théorème n'est pas très difficile : c'est une application de la méthode d'intégration par parties. Noether considère une symétrie infinitésimale d'une intégrale d'action, c'est-à-dire une symétrie du lagrangien à une divergence près, et détermine la loi de conservation correspondante pour le système d'équations d'Euler-Lagrange associé – dont elle appelle les membres de gauche les « expressions lagrangiennes » –, résultat qui généralise de nombreux résultats plus anciens : la relation liant invariances et lois de conservation était déjà connue de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) qui avait développé le calcul des variations dans son *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* (1760), calcul dont le principe avait été introduit par Euler (1707-1783) en 1744 dans sa *Methodus inveniendi lineas curvas, maximi minimive proprietate gaudentes*[f]. Avec l'évolution dans le temps d'un système décrit par les équations d'Euler-Lagrange associées à un lagrangien invariant par les translations, le moment linéaire est conservé, et de même le moment angulaire pour un lagrangien invariant par rotations : ces résultats sont déjà dans le traité de Lagrange, *Mécanique analytique*, en 1811.

Ce qui est remarquable, c'est la très grande généralité des concepts introduits par Noether. L'invariance infinitésimale qu'elle considère est beaucoup plus générale que l'invariance par un champ de vecteurs ordinaire. Elle introduit les champs de vecteurs dont les composantes sont fonction non seulement des variables indépendantes, telles que le temps et les coordonnées d'espace, mais sont aussi fonction des variables dépendantes, telles que les composantes des champs, ainsi que de leurs dérivées d'ordre fini mais arbitraire. C'est seulement un demi-siècle plus tard que ces « symétries généralisées » furent redécouvertes par de nombreux auteurs. Peter Olver, dans son livre de 1986, appelant "generalized vector fields" ce que Noether avait appelé « transformations infinitésimales », souligna que ce concept avait été introduit par Noether en 1918 et en montra l'énorme importance dans les applications aux équations différentielles. Le concept de champ de vecteurs généralisés est indispensable dans la théorie des systèmes complètement intégrables, apparue en 1975 avec l'étude de l'équation de Korteweg-de Vries, et par conséquent dans la théorie des solitons et ses nombreuses applications.

Théorème II : Identités

Le second théorème était la clef d'une explication du problème posé par la conservation de l'énergie en relativité générale. Noether y considère le cas d'un lagrangien invariant par ρ symétries, dépendant chacune linéairement d'une fonction arbitraire et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Une telle symétrie est, en fait, définie par un opérateur différentiel linéaire à valeurs vectorielles. De la condition d'invariance du lagrangien, elle déduit ρ identités satisfaites par les « expressions lagrangiennes » (*i.e.*, les composantes de la différentielle d'Euler-Lagrange qui sont les membres de gauche des équations variationnelles) et leurs dérivées partielles. Elle obtient ce résultat en remarquant que, pour exprimer la condition d'invariance, il faut remplacer la formule d'intégration par parties, utilisée dans son premier théorème, par l'emploi de l'adjoint(g) de l'opérateur différentiel qui définit la symétrie, et l'appliquer à une combinaison linéaire des composantes de la différentielle d'Euler-Lagrange. Elle obtient alors une identité satisfaite par ces composantes et leurs dérivées en utilisant « les règles classiques du calcul différentiel », c'est-à-dire le théorème appelé aujourd'hui lemme de Du Bois-Reymond, du nom du mathématicien suisse Paul Du Bois-Reymond (1831-1889), qui affirme que si l'intégrale du produit d'une fonction donnée par une fonction arbitraire est nulle, alors la fonction donnée est nulle.

Comment ce deuxième théorème de Noether a-t-il contribué à la résolution de la question de la conservation de l'énergie dans la théorie de la relativité générale ? Dans la situation qu'elle considère, elle obtient ce qu'elle appelle des « relations de divergence impropres », *i.e.*, soit une loi de conservation qui est satisfaite identiquement, que les équations de champ soient satisfaites ou non (la loi de conservation est satisfaite "off-shell"), soit une relation de divergence pour une quantité telle que non seulement sa divergence mais la quantité elle-même s'annule quand les équations d'Euler-Lagrange sont satisfaites, "on shell".

Statue de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) à Turin.

Ce résultat de mathématique permit à Noether d'examiner une assertion de Hilbert qui avait été récemment publiée et de la formuler dans la grande généralité de la théorie des groupes. Celui-ci avait affirmé que « dans le cas de la relativité générale, et dans ce cas seulement », il n'y a pas de lois de conservation « propres ». Elle conclut que « le terme de relativité utilisé en physique doit être remplacé par invariance par rapport à un groupe », et que le manque de lois de conservation propres en relativité générale s'explique par le fait que les groupes de Lie de dimension finie qui laissent le lagrangien invariant sont en fait des sous-groupes du groupe d'invariance de la théorie, qui est de dimension infinie. Dans ce cas de « covariance générale », les lois de conservation que l'on croit obtenir en appliquant le Théorème II ne sont donc que de simples identités.

Cette observation essentielle de Noether s'appliquerait à la théorie de jauge de Hermann Weyl (1885-1955), publiée en 1929 dans son article au *Zeitschrift für Physik*, "Elektron und Gravitation", et à toutes les théories de jauge ultérieures.

De la théorie des idéaux à la mécanique quantique

Après son article fondamental de 1918, Noether ne publia plus rien sur les symétries des intégrales d'action ni sur leurs conséquences en théorie de la relativité. Mais ses travaux mathématiques ultérieurs sur la théorie des idéaux et les représentations d'algèbres eurent et ont encore une grande importance dans d'autres domaines de la physique. À partir de 1921, Noether introduisit des méthodes radicalement nouvelles dans l'étude de la structure des algèbres et, en les appliquant à l'algèbre d'un groupe fini, elle démontra des théorèmes fondamentaux sur les représentations de groupes. Ces travaux très novateurs eurent une profonde influence tant sur l'algèbre théorique que sur ses applications en physique. C'est aussitôt après la publication par Noether entre 1923 et 1926 de ses articles sur la théorie des idéaux et les représentations que parurent les premiers travaux des physiciens sur les représentations des groupes finis, d'abord ceux d'Eugene Wigner (1902-1995) dans deux articles sur le spectre des atomes publiés en 1926 et 1927, suivis peu après par trois livres fondateurs de la mécanique quantique, celui de Weyl en 1928, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*[h], celui de Wigner en 1931, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*[i], et, en 1932, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*[j], par Bartel van der Waerden (1903-1996) qui avait suivi et rédigé les cours d'algèbre de Noether à Göttingen en 1924-25. Citée ou non, l'œuvre de Noether a influencé le développement des théories quantiques à leurs débuts.

Une mathématicienne

Je n'insisterai pas sur le fait, qui doit pourtant être souligné, que Noether a laissé une œuvre mathématique de première importance bien des années avant que les femmes occupent un rôle de premier plan dans de nombreux domaines de la recherche.

Elle était devenue très célèbre durant les années 1920. On venait à Göttingen pour écouter ses cours, elle dirigea seize thèses de doctorat, dont celles de deux étudiantes, elle avait des collaborations et des invitations en URSS et, en 1932, elle fut invitée à faire une conférence plénière à Zurich au Congrès international des mathématiciens, congrès très important qui n'a lieu que tous les quatre ans. Elle donnait des cours à Göttingen depuis 1924, mais, parce qu'elle était une femme, elle n'y accéda jamais au poste de professeur titulaire.

Pourquoi n'est-ce pas à Göttingen qu'elle a fini sa vie ?

1933

Pourquoi fut-elle obligée de quitter l'Allemagne en 1933 ? Cette question ne nécessite pas une longue explication. Les Nazis avaient pris le pouvoir en 1932 et, parce qu'elle était juive, elle se trouva déchue de son poste de fonctionnaire par le décret du 13 septembre 1933. Elle trouva un poste d'enseignement aux États-Unis, à Bryn Mawr College, non loin de Philadelphie, et se rendait régulièrement à Princeton, à l'Institute for Advanced Study, où elle fit un cours au printemps de 1934. Elle pouvait y rencontrer Einstein.

Elle mourut prématurément en avril 1935 à la suite d'une opération, deux ans après avoir quitté l'Allemagne, son pays natal.

Célèbre, pour quoi ?

Noether n'était ni une proto-féministe, ni une juive pratiquante. En fait, son père et elle se convertirent au protestantisme en 1920, ce qui n'empêcha pas les Nazis de la priver de son emploi en 1933, l'obligeant à prendre refuge aux États-Unis. Mais elle n'était pas grande admiratrice de la démocratie américaine, ses sympathies allaient vers l'Union soviétique. Elle était une femme généreuse, admirée de ses collègues et de ses étudiants et, surtout, elle était une mathématicienne.

Des dizaines d'auteurs ont redécouvert son premier théorème ou prétendu à tort l'avoir généralisé, et des centaines de physiciens ont appliqué son premier ou son second théorème. Son article de 1918 continue à jouer un rôle capital dans de nombreux domaines de la physique. Après 1970, des généralisations véritables ont été découvertes en langage soit algébrique, soit géométrique, tandis que sa courte implication dans un problème de relativité générale, un aspect seulement de son œuvre de mathématicienne, est en fait devenu le principal aux yeux de nombreux physiciens.

Un siècle après « Problèmes variationnels invariants », nous nous permettons de penser à Noether premièrement comme l'auteur de cet article fondateur, tout en rappelant avec force qu'elle fut « aussi », de plus pour ainsi dire, la créatrice de l'algèbre moderne. ■

Cet article est en grande partie adapté de "In Noether's Words: Invariant Variational Problems", *IAMP News Bulletin*, October 2018, pp. 5-9.
Je remercie les éditeurs du *News Bulletin* de l'International Association of Mathematical Physics de m'avoir autorisée à publier la présente version.

(a) Traduit du discours prononcé par Hermann Weyl le 26 avril 1935, publié la même année dans *Scripta Mathematica* et réimprimé dans ses *Gesammelte Abhandlungen* en 1968.

(b) Les « coefficients de Clebsch-Gordan » en mécanique quantique sont appelés du nom du mathématicien Paul Gordan associé à celui du physicien et mathématicien Alfred Clebsch (1833-1872). Mais l'« équation de Klein-Gordon » porte le nom des physiciens, Walter Gordon (1893-1939) – qu'il ne faut pas confondre avec Gordan – et Oskar Klein (1894-1977) que, d'autre part, il ne faut pas confondre avec le mathématicien Felix Klein !

(c) Ces expressions sont traduites de la correspondance d'Einstein publiée dans *The Collected Papers of Albert Einstein*, John Stachel *et al.*, éds., Princeton University Press, vol. **8A** (1998).

(d) Le livre de Peter Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer (1986, deuxième édition 1993), est la meilleure référence pour les deux théorèmes de Noether et leur formulation moderne. Pour le texte de l'article de Noether, "Invariante Variationsprobleme", en traduction, suivi d'un commentaire détaillé sur l'origine des théorèmes et leurs développements en mathématiques et en physique, voir Yvette Kosmann-Schwarzbach, avec la collaboration de Laurent Meersseman, *Les Théorèmes de Noether. Invariance et lois de conservation au XXe siècle*, Éditions de l'École polytechnique (2004 ; deuxième édition, révisée, 2006), ou voir la version anglaise, considérablement augmentée, Yvette Kosmann-Schwarzbach, *The Noether Theorems. Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*, traduit par Bertram E. Schwarzbach, Springer (2011, publication corrigée 2018).

(e) Les lois de conservation sont aussi appelées « équations de continuité ». Quand le temps est la seule variable indépendante, elles expriment le fait que des quantités, les « quantités conservées », sont constantes au cours de l'évolution dans le temps du phénomène décrit par les équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien considéré.

(f) Méthode pour déterminer les courbes qui jouissent de la propriété d'être maximales ou minimales.

(g) Par définition, l'adjoint, $D^\star$, d'un opérateur différentiel linéaire, D, satisfait l'égalité $u\,(Dv) = (D^\star u)\,v$ à divergence près. Le concept d'opérateur adjoint, dû à Lagrange, était classique à l'époque de Noether.

(h) Traduction anglaise, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (1932).

(i) Traduction anglaise, *Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (1959).

(j) Traduction anglaise, *Group Theory and Quantum Mechanics* (1932).