

# Souple et solide

## Comment la matière élastique se déforme-t-elle ?

Serge Mora<sup>(1)</sup> (serge.mora@umontpellier.fr) et Yves Pomeau<sup>(2)</sup>

(1) Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil, UMR 5508, Université de Montpellier et CNRS, 163 rue Auguste Broussonnet, 34090 Montpellier

(2) University of Arizona, Department of Mathematics, Tucson, USA

Les solides mous, tels que la “jelly” de la cuisine anglo-américaine, peuvent supporter de grandes, voire de très grandes déformations. Ils permettent ainsi d’étudier le comportement de la matière élastique soumise à de fortes sollicitations mécaniques.

Nous donnons ici un aperçu de phénomènes originaux rencontrés lorsque ces solides sont placés dans des conditions mettant en évidence leur extraordinaire souplesse : cylindres instables, écoulement des arêtes, instabilité de Rayleigh-Taylor, flottabilité élastique.

Ont contribué aux travaux présentés dans cet article : Basile Audoly, Aditi Chakrabarti, Manoj Chaudhury, Jean-Marc Fromental, Corrado Maurini, Ty Phou.

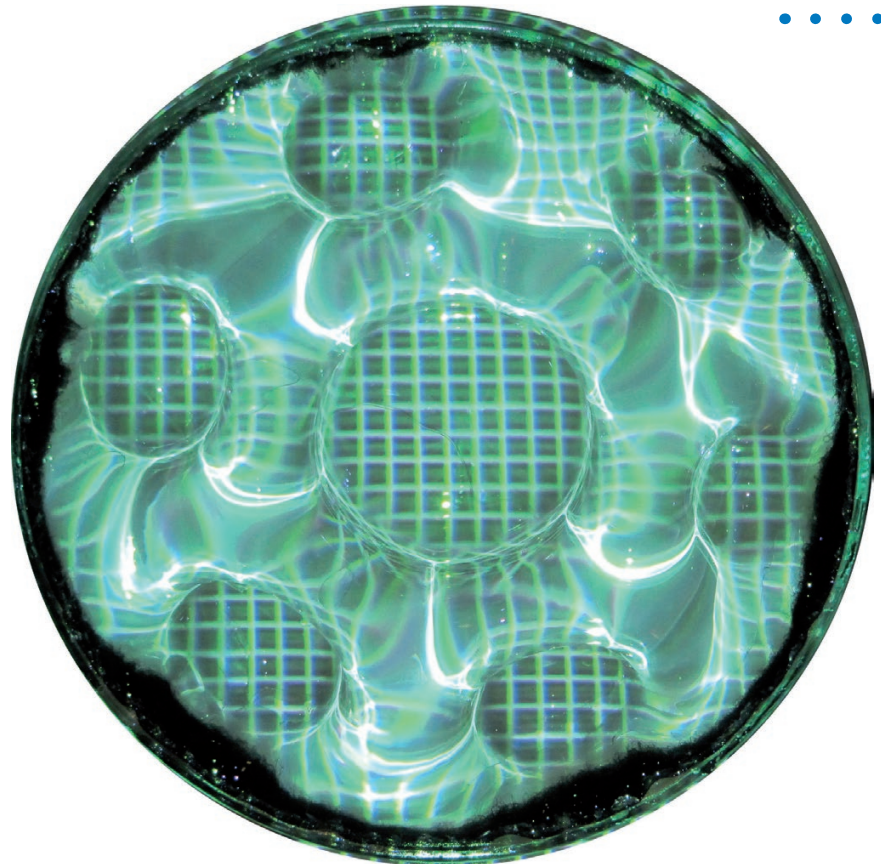
La matière révèle de fascinants phénomènes lorsqu’elle se déforme. On pense d’abord, naturellement, aux fluides que nous voyons au quotidien : les tourbillons, les vagues, les gouttes se formant par la dislocation de minces filets, et bien d’autres encore. Les solides semblent plus sages : leurs déformations sont moins prononcées. Si deux éléments d’un même liquide peuvent s’écarter presque indéfiniment lorsque des forces les y invitent, la réaction élastique des solides s’oppose à une grande déformation ; quand deux points d’un même solide sont contraints à s’éloigner l’un de l’autre d’une trop grande distance, dans la plupart des cas le solide s’endommage de façon irréversible : il flue (déformation irréversible mais sans fracture) ou il se brise.

Pourtant, certains solides (caoutchoucs, gels, tissus biologiques par exemple) peuvent encaisser de très grandes déformations sans rompre ni même s’endommager. Comme dans les liquides, ces déformations génèrent des phénomènes tout aussi intéressants, voire inattendus. Nous montrons dans cette étude que lorsque la souplesse des matériaux, les dimensions caractéristiques et les forces appliquées se font écho, des phénomènes particuliers contrôlent les déformations de la matière élastique : comme les liquides, les solides ont une tension de surface dont l’influence pour les matériaux mous est déterminante aux petites échelles, déstabilisant tout cylindre suffisamment fin, ou entraînant un écoulement d’arêtes initialement vives ; aux grandes échelles, au contraire, ce sont les forces volumiques (par exemple la pesanteur) qui pilotent les formes d’équilibre, déstabilisant toute surface horizontale orientée vers le bas, ou permettant l’immersion complète d’objets pesants dans des solides mous.

### La matière élastique

Un morceau de solide possède une forme propre : partant d’un état non contraint, si on lui applique une sollicitation mécanique infinitésimale que l’on interrompt au bout d’un certain temps, le solide élastique reprendra sa forme initiale. Lorsqu’une force plus grande est appliquée, il peut se comporter de deux manières différentes, suivant sa nature et l’amplitude de la force. Ou bien la réaction à cette force reste purement élastique comme cela était le cas pour les contraintes infinitésimales ; ou bien le solide peut fluer : endommagé, il ne reviendra plus à sa forme initiale lorsque la force est supprimée. Nous considérons dans cet article uniquement des cas où le comportement du matériau est élastique : si les forces auxquelles le solide a été soumis sont ramenées à zéro, celui-ci retrouve sa forme initiale. En l’absence de dissipation, le solide devrait se mettre à osciller indéfiniment après chaque variation de forces extérieures. En pratique, un état d’équilibre stationnaire finit toujours par être atteint après un régime transitoire en raison de phénomènes dissipatifs. Nous nous intéresserons ci-dessous uniquement à ces états d’équilibre stationnaires.

Un corps élastique déformé possède une énergie élastique égale au travail des forces qui lui ont été appliquées pour atteindre, d’une manière supposée infiniment lente, la déformation finale depuis l’état non déformé. Cette énergie peut être définie pour n’importe quelle sous-partie du solide élastique et nous appellerons  $W$  sa densité volumique d’énergie élastique. Elle est d’autant plus grande que la déformation locale est grande. Pour un matériau élastique homogène et isotrope, elle peut s’écrire sous la forme  $W = E f(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ ,



où  $E$  est le module de Young du solide,  $f$  est une fonction sans dimension qui doit vérifier certaines symétries [1], et  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$  sont les allongements relatifs (définis à la figure 1). La fonction  $f$  change d'un matériau élastique à l'autre mais, dans la limite des petites déformations, on a toujours  $f(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \simeq 1/2(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)$ , ce qui constitue la loi de Hooke (relation linéaire entre la force par unité de surface et les allongements relatifs) pour les solides incompressibles et isotropes que l'on considère ici.

Le module de Young a la dimension physique d'une pression. Plus il est petit, plus le matériau est souple. Pour les solides usuels comme les métaux, les alliages, les minéraux, les céramiques, les verres ou le bois, le module de Young vaut plusieurs

**Instabilité, dite de Rayleigh-Taylor, de l'interface solide-air d'un gel de polyacrylamide contenu dans un récipient cylindrique retourné de façon que la surface du gel soit orientée vers le bas.** On observe la formation de plusieurs « cuvettes ». La grille lumineuse carrée permet de visualiser les reliefs.

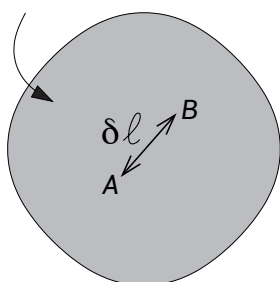
gigapascals (GPa). La limite d'élasticité de ces matériaux, c'est-à-dire la gamme des allongements relatifs pour lesquels leur comportement est celui d'un solide élastique, est généralement inférieure au dixième de pourcent. Les élastomères et

les gels ont un comportement élastique sur une gamme de déformations nettement plus large, jusqu'à 1000% dans certains cas. Ils ont aussi un module de Young significativement plus petit que les solides usuels cités ci-dessus : d'une dizaine de kilopascals (kPa) à plusieurs centaines de mégapascals (MPa) pour les élastomères et, encore plus petit, d'une dizaine de pascals (Pa) à une dizaine de kPa pour les gels réticulés.

La faible valeur du module de Young des élastomères et des gels provient de leur structure particulière. Un élastomère est constitué d'une molécule unique géante formant un réseau tridimensionnel de chaînes jointes les unes aux autres par des liaisons chimiques constituant les points de réticulation. Au cours d'une déformation, la disposition des segments des chaînes constituant ce maillage tridimensionnel est modifiée par rapport à la configuration d'équilibre, d'où une diminution de l'entropie du système ; la suppression de la contrainte ramène le matériau à son état initial (état le plus probable correspondant à l'entropie la plus élevée), conduisant à un comportement élastique.

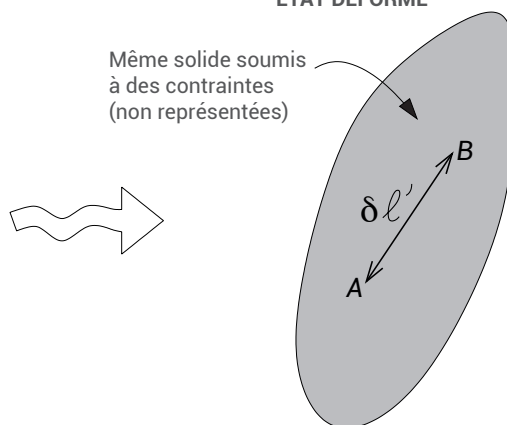
**ÉTAT NON DÉFORMÉ**

Solide élastique non contraint



**ÉTAT DÉFORMÉ**

Même solide soumis à des contraintes (non représentées)



**1. Déformation locale dans un solide.** Soient deux points matériels A et B espacés de la longueur infinitésimale  $\delta l$  dans l'état non déformé (pour la lisibilité de la figure, les distances sont agrandies). Si une transformation induit localement un gradient de déplacement (après soustraction d'un éventuel mouvement de rotation solide), alors la distance qui sépare ces deux points matériels a changé. Soit  $\delta l'$  la nouvelle distance. Le rapport  $\epsilon = (\delta l' - \delta l) / \delta l$  est l'allongement relatif dans la direction joignant ces deux points matériels. Ce nombre sans dimension est souvent exprimé en pourcent. La déformation locale est entièrement définie par la donnée des allongements relatifs ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$ ) dans trois directions principales privilégiées, perpendiculaires entre elles.





Un gel réticulé est une solution de macromolécules réticulées par des liaisons chimiques ou physico-chimiques. Contenant généralement moins de points de réticulation par unité de volume qu'un élastomère, les gels sont plus souples.

Si le caoutchouc, le polybutadiène, le néoprène et les élastomères silicone ont le plus grand poids économique, ces matériaux jouent aussi un rôle important dans le monde du vivant. L'élastine, une protéine, permet par exemple aux cellules de se lier, et aux tissus biologiques de se former. Elle s'étire jusqu'à 150% de sa longueur au repos sans se briser, procurant de la souplesse aux tissus.

Dans la suite, nous présentons des phénomènes mis en évidence dans des gels réticulés de polyacrylamide ou d'agar-agar. Ces matériaux, dont les propriétés physiques sont facilement contrôlables, sont d'excellents modèles pour étudier, comprendre, ou simplement mettre en évidence des mécanismes physiques intervenant aussi sur des systèmes plus compliqués comme les tissus biologiques, ou certains organes mous et mécaniquement homogènes comme le foie ou le cerveau.

## Effets capillaires

### Cylindres instables

Des solutions (liquides) aqueuses chaudes d'agar-agar (concentration en masse variant de 0,05% à 0,16%) sont injectées dans des moules cylindriques. La longueur des moules est de 2,4 cm, leur rayon varie d'un moule à l'autre : 150  $\mu\text{m}$ , 240  $\mu\text{m}$  ou 260  $\mu\text{m}$ . Après refroidissement, le liquide se transforme en gel élastique dont le module de Young dépend de la concentration en agar-agar. Il varie entre 42 et 153 Pa, ce qui correspond à des matériaux extrêmement souples. Les moules (en polystyrène) sont dissous par immersion dans du toluène liquide. Les cylindres de gel sont alors libérés dans le toluène liquide, leurs extrémités restant attachées à des cadres rigides de telle sorte que la longueur bout à bout des cylindres reste inchangée après dissolution. L'eau et le toluène étant deux liquides immiscibles, il n'y a pas d'échange de matière entre le toluène et le gel.

La forme et les dimensions des cylindres les plus épais et formés des gels les plus rigides sont inchangées après dissolution. Les cylindres les plus fins et les plus souples se cassent au cours de la dissolution des

moules. Pour les cylindres intermédiaires, une modulation longitudinale du rayon apparaît spontanément, puis reste figée pendant une durée supérieure à plusieurs dizaines de minutes. Cette modulation est d'autant plus marquée que le module de Young et le rayon sont petits (fig. 2). Une mesure de l'amplitude de la modulation en fonction du module de Young prouve l'existence d'un module de Young critique  $E^*(r_0)$  qui dépend du rayon initial  $r_0$  : pour un rayon  $r_0$  donné, les cylindres droits constitués d'un gel ayant un module plus faible que  $E^*(r_0)$  sont instables et la configuration stable présente une modulation (à condition qu'ils ne se soient pas cassés) ; les cylindres ayant un module supérieur sont stables.

La tension de surface  $\gamma$  d'une interface séparant deux liquides, ou un liquide et un solide, est l'énergie par unité de surface associée à l'interface. Cette énergie provient de l'attraction entre les différentes molécules (ou atomes), qui n'est plus équilibrée à cause de la présence de l'interface. Elle explique pourquoi une goutte de liquide placée dans un autre liquide immiscible (et de même densité pour s'affranchir des effets de la pesanteur) prend une forme sphérique : la sphère ayant la plus petite surface pour un volume donné, cette forme minimise l'énergie de surface. De même, un cylindre fluide entouré par un autre fluide est instable, ce qui conduit à la formation de gouttes : la surface d'un cylindre déformé par une modulation longitudinale du rayon est inférieure à celle du cylindre droit dès que la longueur d'onde de la modulation est supérieure à  $2\pi$  fois le rayon (c'est l'instabilité de Rayleigh-Plateau [2]).

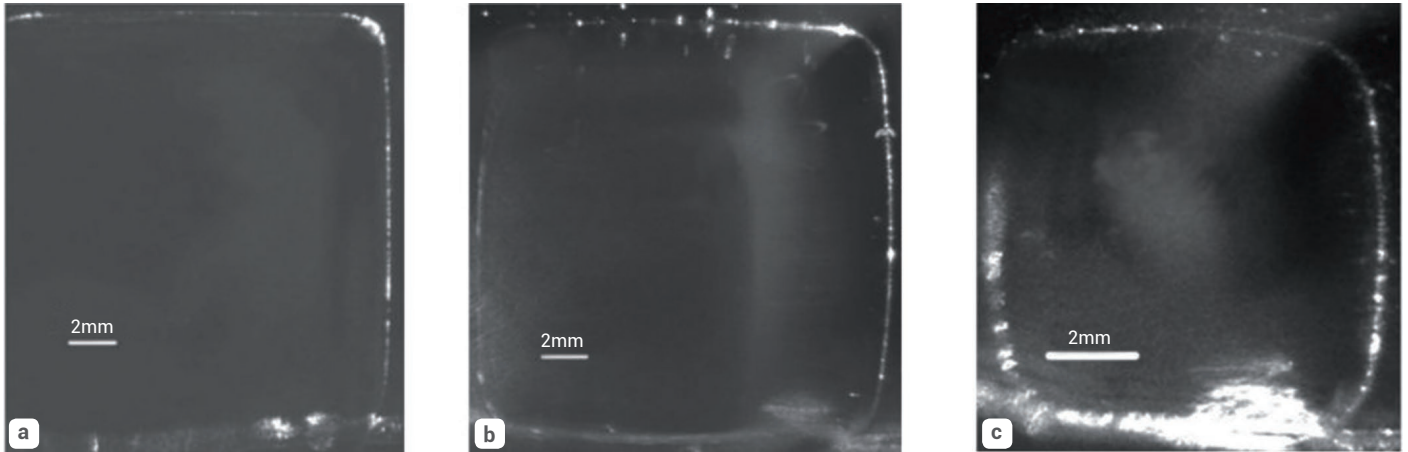
L'énergie totale (somme de l'énergie de surface et de l'énergie élastique dans le cas d'un corps élastique) d'un système à l'équilibre mécanique est minimale. Considérons un motif de dimension caractéristique  $\ell$  d'un matériau élastique soumis à une déformation. L'énergie de surface  $\mathcal{E}_{\text{surf}}$  associée est de l'ordre de  $\gamma\ell^2$ , et l'énergie élastique  $\mathcal{E}_{\text{elas}}$  est de l'ordre de  $E\ell^3$ . Ainsi, si  $\ell \gg \gamma/E$ , alors  $\mathcal{E}_{\text{surf}} \ll \mathcal{E}_{\text{elas}}$  et l'élasticité pilote la forme d'équilibre du motif. Au contraire, si  $\ell \ll \gamma/E$  les effets de la tension de surface sont dominants.  $\ell_{\text{ec}} = \gamma/E$  est la longueur élasto-capillaire, qui est d'autant plus grande que la tension de surface est grande et que le module de Young est petit.

Revenons aux cylindres élastiques baignant dans le toluène, et prenons comme dimension caractéristique le rayon du cylindre  $r_0$ . D'après ce qui précède, on s'attend à ce qu'une instabilité de Rayleigh-Plateau (phénomène généré par la tension de surface) se produise lorsque  $r_0 \ll \ell_{\text{ec}}$ , le cylindre restant au contraire droit lorsque  $r_0 \gg \ell_{\text{ec}}$ . Un calcul plus détaillé qui consiste à déterminer le champ de déformation qui minimise l'énergie totale du système, montre que la compétition entre l'effet déstabilisateur (la tension de surface) et l'effet stabilisateur (l'élasticité) conduit à un rayon critique  $r_0^* = \ell_{\text{ec}}/2 = \gamma/2E$ , ou de façon équivalente à un module de Young critique  $E^*(r_0) = \gamma/(2r_0)$ . Les gels d'agar-agar sont essentiellement constitués d'eau emprisonnée dans le « filet » déformable constitué par le squelette de macromolécules du gel. La tension de surface du gel est donc ici essentiellement régie par les interactions



**2. Modulation longitudinale spontanée de cylindres de gel.** Quatre cylindres en gel d'agar-agar, de différents modules de Young  $E$  et de rayons identiques ( $r_0 = 240 \mu\text{m}$ ) sont placés dans du toluène liquide. Le cylindre le plus rigide reste droit, tandis que des modulations du rayon apparaissent spontanément et se figent pour les cylindres plus souples.





**3. Vues partielles de sections droites de barreaux de polyacrylamide placés dans une huile de même densité que le gel, éclairés par une nappe laser transverse.** Ces sections droites étaient initialement carrées (forme imposée par les moules). La longueur des arêtes dans l'état non déformé et le module de Young valent : (a) 12 mm et 375 Pa ; (b) 12 mm et 180 Pa ; (c) 6 mm et 180 Pa.

entre cette eau et le toluène, et on s'attend à ce qu'elle soit proche de celle entre ces deux liquides, soit  $\gamma \sim \gamma_{\text{eau-toluène}} \simeq 36,5 \text{ mN/m}$ . Cette valeur conduit, d'après la formule théorique, à des modules de Young départageant cylindres stables et instables, en accord quantitatif avec les expériences [3]. Nous en concluons que la déstabilisation des cylindres de gel est une manifestation de la tension de surface, et que l'existence du seuil s'explique bien par la compétition entre tension de surface et élasticité. Pour les solides habituels (métaux, bois, céramiques, etc.),  $\ell_{\text{ec}}$  est de l'ordre des distances interatomiques, et aucun effet de la tension de surface sur la forme d'équilibre de ces solides élastiques n'est attendu. Pour les matériaux mous (gels, élastomères), la tension de surface et l'élasticité ayant des origines différentes (la tension de surface provient essentiellement des propriétés du solvant pour le gel et des propriétés des monomères pour un élastomère ; l'élasticité provient de l'agencement des points de réticulation),  $\ell_{\text{ec}}$  est plus grande que toute longueur microscopique et devient ainsi pertinente dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Par exemple pour les cylindres de la figure 2,  $\ell_{\text{ec}}$  est comprise entre  $450 \mu\text{m}$  ( $E = 81 \text{ Pa}$ ) et  $850 \mu\text{m}$  ( $E = 43 \text{ Pa}$ ). Pour un élastomère avec  $E \sim 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\ell_{\text{ec}} \sim 1 \mu\text{m}$  : l'instabilité ne pourrait être observée que pour des objets bien plus fins que ceux de la figure 2.

Le même phénomène se produit aussi lorsqu'une fine âme rigide est entourée d'une gaine élastique souple. Il conduit à des

motifs ressemblant aux nœuds de Ranvier, qui sont une succession d'amincissements et de bourrelets de la gaine de myéline entourant un axone dans le système nerveux.

Au paragraphe suivant, nous considérons une géométrie initiale renfermant un large éventail d'échelles de longueurs : de nettement inférieur à nettement supérieur à la longueur élasto-capillaire. Les phénomènes liés à la tension de surface se manifesteront alors sans seuil, leur observation devant se faire à la bonne échelle spatiale.

### Émoussement des arêtes

Des moules de barreaux de section carrée d'arête de longueur  $a$  sont remplis de solutions aqueuses contenant des monomères d'acrylamide et de bi-acrylamide, à des concentrations différentes. Une réaction de polymérisation transforme ces solutions en gels élastiques. Les moules sont alors dissous comme précédemment. Les barreaux de gel sont ensuite posés à plat sur une grille en téflon qui minimise les contacts. Afin d'annuler tout effet de la pesanteur, les échantillons sont mis dans un mélange d'huiles fluorées de même densité que les gels. Une section droite du barreau est éclairée par une nappe laser, ce qui permet la visualisation des déformations de cette section. On constate que les angles droits, initialement vifs, ont laissé place à une ligne de courbure finie. Ces déformations sont d'autant plus marquées que l'arête et le module de Young sont petits (fig. 3). En remplaçant l'huile par de l'eau, le gel retrouve exactement la forme du moule. Cette dernière observation est

une indication forte d'un effet réversible induit par la tension de surface. En effet, la tension de surface entre le gel (constitué principalement d'eau) et l'eau est largement plus faible que celle entre l'huile et le gel ( $\gamma_{\text{eau-huile}} \simeq 43 \text{ mN/m}$ ).

Les déformations d'un long barreau élastique (de module de Young  $E$ ) de section carrée (avec des arêtes de longueur  $a$ ) ont été simulées numériquement en utilisant la méthode des éléments finis. Dans l'état de base où la tension de surface est nulle, le barreau n'est pas déformé. L'énergie élastique est donc nulle. La tension de surface est ensuite fixée à une valeur non nulle,  $\gamma$ . La forme d'équilibre du barreau est alors calculée en minimisant l'énergie totale (énergie de surface et énergie élastique) du barreau.

Remarquons que ce système est décrit par le seul nombre sans dimension,  $\ell_{\text{ec}}/a$ . Lorsque le système est observé dans sa globalité, c'est-à-dire sur une échelle de longueur de l'ordre de  $a$ , les déformations sont négligeables dans la limite où  $\ell_{\text{ec}}/a \ll 1$ , alors que la forme devient très arrondie dans la limite  $\ell_{\text{ec}}/a \gg 1$  : l'élasticité est alors trop faible pour s'opposer à l'action de la tension de surface. L'excellent accord entre les formes des sections droites issues des expériences et des simulations, obtenu en prenant logiquement pour la tension de surface entre le gel et l'huile la valeur de celle entre l'eau et l'huile, confirme que les déformations observées résultent bien de la tension de surface [4].



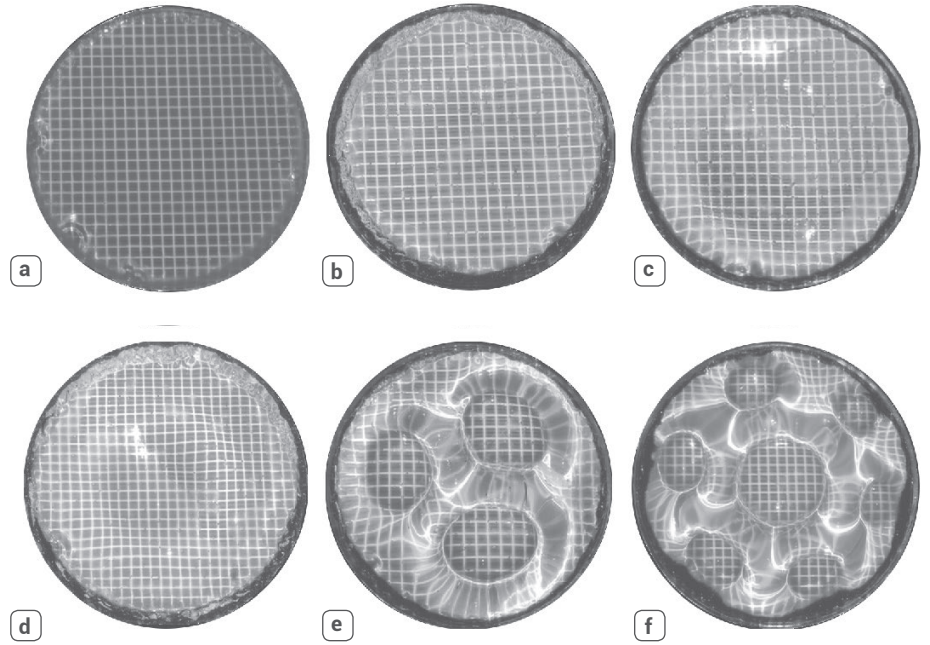
## Effets de la pesanteur

### Instabilité de Rayleigh-Taylor

Différents gels de polyacrylamide sont maintenant formés dans des récipients cylindriques dont le diamètre vaut 19 cm et la profondeur  $h$  varie entre 2,1 et 2,8 cm. Ces récipients sont ensuite retournés, de telle sorte que la surface libre est orientée vers le bas. On constate que les surfaces inversées des gels les plus rigides et en couches les plus fines restent parfaitement planes (fig. 4a), tandis que des déformations apparaissent pour des gels plus souples ou d'épaisseur plus grande. Elles sont d'autant plus marquées que le module de Young est faible (figures 4b à 4f) et que la profondeur est grande.

Il est bien connu que l'interface séparant deux fluides pesants est instable lorsque le fluide le plus lourd se trouve au-dessus du plus léger. Le mécanisme responsable de cette instabilité, qui porte le nom d'instabilité de Rayleigh-Taylor [5], se comprend en comparant les énergies de pesanteur des fluides lorsque l'interface est plane (orientée vers le bas) et lorsqu'elle est perturbée : les fluides étant incompressibles, cette perturbation revient nécessairement à déplacer une certaine partie du fluide le plus dense vers la zone initialement occupée par le fluide le moins dense (c'est-à-dire vers le bas), et à déplacer une partie du fluide le moins dense vers la zone initialement occupée par le fluide le plus dense (c'est-à-dire vers le haut). Ainsi, le centre de gravité de l'ensemble est abaissé et l'énergie potentielle de pesanteur du système est réduite, d'où la tendance du système à s'écarter de la configuration où l'interface est plane et horizontale.

Dans le cas d'un solide, l'élasticité s'oppose à l'action déstabilisante de la pesanteur. L'énergie élastique caractéristique par unité de surface horizontale est  $\mathcal{E}_{\text{elas}} \sim hE$ , alors que l'énergie de pesanteur caractéristique par unité de surface est  $\mathcal{E}_{\text{pesa}} \sim \rho gh^2$ , où  $\rho$  est la masse volumique du gel. Le rapport  $\mathcal{E}_{\text{pesa}}/\mathcal{E}_{\text{elas}}$  conduit au nombre sans dimension  $\rho gh/E$ . Le calcul du champ de déformations minimisant l'énergie totale démontre que l'instabilité de Rayleigh-Taylor se manifeste, à l'interface solide-air, lorsque ce nombre sans dimension est supérieur à une valeur seuil égale à 2,074 [6]. Ce résultat est en accord avec les observations expérimentales, qui font apparaître un seuil pour  $\rho gh/E = 2,02 \pm 0,07$ . Notons que ces effets de la pesanteur



4. Instabilité de la surface d'un gel de polyacrylamide orientée vers le bas. Le diamètre du récipient est de 19 cm, sa profondeur est de 2,8 cm. Les modules de Young sont (a) 234 Pa, (b) 132 Pa, (c) 129,9 Pa, (d) 128,4 Pa, (e) 123 Pa, (f) 120 Pa. Une grille lumineuse carrée est projetée sur les surfaces des gels afin de faciliter la visualisation des reliefs.

apparaissent lorsque la longueur caractéristique du système,  $h$ , est supérieure à  $2,074 E/\rho g$  : contrairement aux effets de la tension de surface (qui sont négligeables ici de par les dimensions du système), ceux résultant des forces volumiques impliquent les grandes longueurs.

Les vues (e) et (f) de la figure 4 montrent que les déformations peuvent être grandes, avec la formation de plusieurs cuvettes. Dans ce cas, la physique du système est complexe. Les motifs ne correspondent pas tous à des minima absolus de l'énergie, mais à des minima locaux. On observe alors des états métastables.

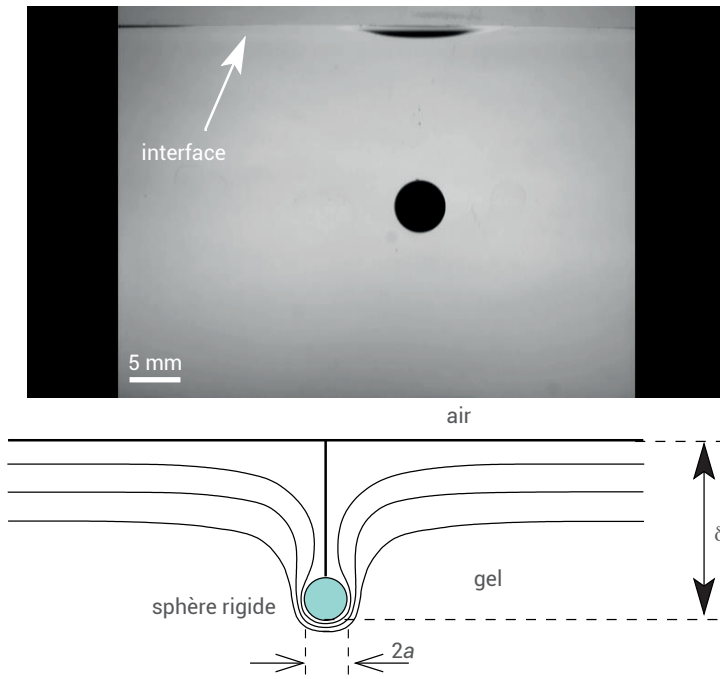
Nous allons dans la suite présenter des expériences où de grandes déformations sont plus simples à appréhender, dans la mesure où l'état d'énergie minimale est clairement identifié.

### Flottabilité élastique

Une bille d'acier (masse volumique  $\rho_{\text{acier}} \simeq 7,8 \text{ g/cm}^3$ ) de rayon  $a$  (variant entre 0,5 et 5 mm) est délicatement déposée à la surface de gels dont le module de Young varie de 30 à 3000 Pa. Cette surface se déforme alors. Les billes de plus petite taille déposées sur les gels les plus durs s'enfoncent légèrement. La profondeur de pénétration  $\delta$ , définie comme la distance

verticale entre la position de la surface non déformée du gel et le bas de la bille, est d'autant plus grande que le gel est souple et que le rayon est grand. Au-delà d'un seuil, la bille se trouve totalement englobée par le gel : la surface de ce dernier se replie sous l'effet de sa tension de surface, de telle sorte que le puits correspondant au passage de la bille se resserre complètement sur lui-même. La surface apparente du gel est alors à nouveau horizontale tout en étant fortement étirée (fig. 5). Nous nous sommes intéressés surtout à ce régime où la bille est totalement enveloppée. Sa position résulte de l'équilibre entre son poids, les forces élastiques et les forces de pression hydrostatique (assimilables à une poussée d'Archimède). La mesure de la profondeur  $\delta$  pour différents rayons montre que, dans la limite où  $\delta \gg a$ ,  $\delta$  est proportionnelle à  $a^p$  avec  $p = 1,48 \pm 0,05$ .

L'énergie totale est la somme des énergies de pesanteur de la bille et du gel, et de l'énergie élastique du gel. L'énergie de pesanteur fait intervenir la masse volumique apparente de l'acier,  $\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{gel}}$ . La densité d'énergie élastique est égale au module de Young multiplié par une fonction sans dimension qui dépend des allongements relatifs. Dans la limite  $\delta \gg a$ , la seule longueur caractéristique définissant la déformation du gel est  $\delta$  : en tout point du



5. Flottabilité élastique d'une bille d'acier de 5 mm de diamètre. Initialement déposée à la surface horizontale d'un gel dont le module de Young vaut 39 Pa, la bille s'enfonce jusqu'à atteindre une position stable.

gel dans la région déformée, le déplacement est proportionnel à  $\delta$ , et sa variation d'un point à l'autre se fait avec une longueur caractéristique, elle aussi proportionnelle à  $\delta$ . Les allongements relatifs, qui s'obtiennent à partir du gradient du déplacement, sont donc indépendants de  $\delta$  ! La densité d'énergie élastique est ainsi proportionnelle à  $E$ . Après s'être assuré que la limite  $a/\delta \rightarrow 0$  n'introduit pas de singularité, l'énergie élastique s'obtient en multipliant sa densité par le volume déformé caractéristique. La seule longueur caractéristique associée à la déformation étant  $\delta$ , le volume déformé caractéristique ne peut être que proportionnel à  $\delta^3$ . On en déduit que l'énergie élastique est proportionnelle à  $E \delta^3$ . Ainsi, l'énergie totale vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{totale}} = (\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{gel}}) (4/3) \pi a^3 g \delta + k E \delta^3.$$

Le premier terme du membre de droite est l'énergie de pesanteur ; le second est l'énergie élastique ( $k$  est un facteur sans dimension de l'ordre de 1). En écrivant qu'à l'équilibre la valeur de  $\delta$  doit correspondre à un minimum de cette énergie, on trouve  $\delta \propto a^{3/2}$ , en accord avec les observations [7].

L'hypothèse  $\delta \gg a$  revient à supposer que la pression caractéristique exercée par la bille (son poids auquel la poussée d'Archimède a été soustraite, divisé par sa surface) est largement plus grande que le module de Young du gel, soit  $a \gg E/(\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{gel}})g$ . Nous en déduisons que l'enrobage de la bille par le gel est un phénomène qui implique des objets de taille bien plus grande que la longueur caractéristique  $E/(\rho_{\text{acier}} - \rho_{\text{gel}})g$  émergeant des propriétés du gel et de la force volumique appliquée.

## Conclusion

Au-delà des petites déformations que l'on rencontre dès que la matière élastique est soumise à la moindre force, des phénomènes spécifiques se manifestent si des dimensions du système correspondent à une échelle de longueur caractéristique déterminée par le module de Young du matériau et les forces appliquées, comme la force de pesanteur ou la tension de surface. Ainsi, les effets capillaires originaux apparaissent sur les échelles de longueur inférieures à  $\gamma/E$ , et les effets de la pesanteur se manifestent sur les échelles de longueur supérieures à  $E/\rho g$ . Dire qu'un matériau est souple uniquement à partir de la valeur de son module de Young n'a pas de sens : au mieux peut-on dire qu'un matériau est plus souple ou plus rigide qu'un autre. Les expériences décrites dans cet article présentent des situations mettant en exergue des phénomènes résultant du caractère souple de la matière solide. On peut alors dire que le matériau est souple lorsqu'un de ces phénomènes se fait sentir aux échelles de l'observation.

Les gels élastiques utilisés ci-dessus ayant un module de Young particulièrement faible, les phénomènes se sont révélés sur des échelles de longueur observables à l'œil nu. Lorsque les matériaux sont plus durs que ces gels, ces phénomènes apparaissent sur de plus petites échelles, ou alors à des échelles semblables mais sous l'effet de forces plus intenses, par exemple en remplaçant la pesanteur terrestre par la forte accélération d'une fusée ou d'une centrifugeuse. La possibilité de fabriquer des motifs bien définis, de contrôler mécaniquement l'encapsulation d'objets dans un solide, ou de connaître le comportement de la matière lorsqu'elle est très étirée (une situation que les chirurgiens rencontrent avant d'effectuer certaines incisions) constituent des applications importantes de cette étude. ■

### Références

- 1• R.W. Ogden, *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood Limited, Chichester (1984).
- 2• J. Plateau. *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, volume II. Gauthier-Villars, Paris (1873).
- 3• S. Mora et al. "Capillarity driven instability of a soft solid", *Phys. Rev. Lett.*, **105** (2010) 214301.
- 4• S. Mora et al. "Solid drops: Large capillary deformations of immersed elastic rods", *Phys. Rev. Lett.*, **111** (2013) 114301.
- 5• L. J. Rayleigh, "Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density", *Proc. London. Math. Soc.*, **14** (1883) 170-177.
- 6• S. Mora, T. Phou, J. M. Fromental et Y. Pomeau, "Gravity driven instability in solid elastic layers", *Phys. Rev. Lett.*, **113** (2014) 178301.
- 7• A. Chakrabarti, M.K. Chaudhury, S. Mora et Y. Pomeau, "Elastobuoyant heavy spheres: A unique way to study nonlinear elasticity", *Physical Review X*, **6** (2016) 041041.

### Pour en savoir plus

Vidéo en ligne de la conférence expérimentale, Espace des Sciences Pierre-Gilles de Gennes : *Quand les solides imitent les liquides*, 58 min (2015) : [www.espgg.org/Quand-les-solides-imitent-les](http://www.espgg.org/Quand-les-solides-imitent-les).